استفاده از روش هموتوپی پرتوربیشن برای تحلیل انتقال حرارت همرفت اجباری سیال محیط متخلخل در درون محفظه استوانه‌ای

عبدالله رضوانی‌آلیله[۱]، رسام دهنوی[۲]، فرزانه بهنام گرمی[۳]

rezvani_61@yahoo.com

۱- کارشناسی ارشد مهندسی مکانیک، دانشگاه امام خمینی نوشهر
۲- کارشناسی ارشد مهندسی مکانیک، گرایش تبدیل انرژی
۳- کارشناس مهندسی مکانیک،گرایش حرارت و سیالات

چکیده

در این مقاله، به تحلیل جریان همرفت اجباری و لایه‌ای کاملاً توسعه یافته در داخل یک لوله مدور حاوی مواد اشباع شده و متخلخل با شار حرارتی یکنواخت در دیواره‌ها، با استفاده از روش هموتوپی پرتوربشن پرداخته شده است. همچنین در این مقاله، در ناحیه متخلخل برای معادله مومنتوم از مدل بریکمن استفاده شده است که مناسب برای محیط متخلخل است و از اهمیت عملی بالایی برخوردار است. از روش WKB برای ارزش‌های کوچکی از عددهای دارسی استفاده شده است. در مواردی که عددهای دارسی بزرگ است، برای حل معادلات مومنتم از روش هموتوپی پرتوریشن استفاده شده است. همچنین برای حل معادله توازن انرژی در عددهای دارسی کوچک و بزرگ، مشابه روشهای اعمال شده در معادله سرعت استفاده شده است. نتایج حاصل از تحقیق نشان می‌دهد که پروفیل سرعت شدیداً به مقدار پارامتر s، بستگی دارد، به‌طوری‌که سرعت سیال در محیط متخلخل در مقایسه با سرعت سیال در محیط سیال خالص کمتر بوده و با کاهش بیشتر عدد دارسی، سرعت سیال در این محیط کاهش می‌یابد.

واژگان کلیدی

انتقال حرارت جابه‌جایی اجباری، روش هموتوپی پرتاربیشن، مدل بریکمن، عدد دارسی، محیط متخلخل.

تاریخ دریافت مقاله :	۹۱/۲/۱۱
تاریخ پذیرفته شدن مقاله :	۹۱/۵/۱۲

۱- مقدمه

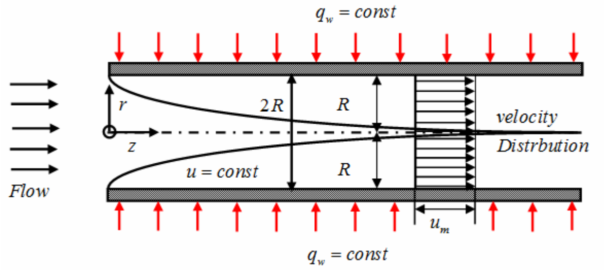
امروزه استفاده از محیط متخلخل به عنوان روشی برای افزایش انتقال حرارت جابجایی در اکثر کاربردهای مهندسی به صورت گسترده مورد بررسی قرار گرفته است. از جمله کاربردهای ماده متخلخل می‌توان به خنک کاری وسائل الکترونیکی، نگهداری از دانه‌ها، غلات و محصولات کشاورزی و جلوگیری از رشد آفات در انبارها و سیلوها، مبدل‌های حرارتی، بهبود راندمان خشک کن‌های مواد غذایی، عایق کاری، مکانیک خاک، مهندسی نفت، علم مواد و غیره اشاره نمود [1-3] .

۲- بدنه اصلی مقاله

در این مقاله، برای اولین بار از روش هموتوپی پرتوربیشن برای تحلیل جریان همرفت اجباری و آرام کاملاً توسعه یافته در داخل یک لوله مدور حاوی مواد اشباع شده و متخلخل استفاده شده است و روابطی برای توزیع سرعت سیال درون کانال و توزیع دما ارائه شده است. بیشتر محققان این مساله انتقال حرارت در داخل یک لوله مدور حاوی مواد اشباع شده و متخلخل را در حوزه انتقال حرارت کلاسیک حل کرده‌اند[4]. دقت و اعتبار این روش برای دو حالت در عددهای دارسی بزرگ و کوچک، با نتایج ارائه شده از کار دیگران مقایسه شده است.

۳- معادلات

هندسه فیزیکی محفظه‌ای مورد بررسی و شرایط مرزی در شکل (۱) نشان داده شده است. محفظه‌ای مورد نظر لوله استوانه‌ای شکل می‌باشد که در آن، دیواره بالایی و دیواره پایینی در معرض شار حرارتی ثابت قرار دارد. لایه متخلخل در داخل لوله در تماس با دیواره شار ثابت قرار گرفته و جهت خنک‌کاری المان حرارتی استفاده میشود.



شکل (۱) طرحواره محفظه مورد بررسی به همراه شرایط مرزی

معادلات حاکم بر جریان سیال بر اساس فرضیات زیر بدست آمده‌اند:

الف) خواص ترموفیزیکی بجز چگالی در نیروی شناوری ثابت فرض شده‌اند(تقریب بوزینسک).

ب) رژیم جریان سیال داخل محفظه، لایه‌ای است.

ج) سیال داخل محفظه، نیوتنی، تراکم‌ناپذیر و جریان پایا است.

د) انتقال حرارت تشعشعی در مقایسه با سایر مکانیسم‌های انتقال حرارت داخل محفظه قابل صرفنظر کردن می‌باشد. معادله مومنتوم در دیدگاه بریکمن برای جریان در درون لوله استوانه‌ای شکل حاوی مواد متخلخل به صورت زیر می‌باشد.

$$\mu_{eff}\left(\frac{d^2u^*}{dr^{*2}}+\frac{1}{r}\frac{du^*}{dr^*}\right)-\frac{\mu}{K}u^*+G=0 \qquad (۱)$$

با استفاده از روابط بی‌بعد زیر معادله مومنتوم بریکمن را بی‌بعد می‌کنیم.

$$x=\frac{x^*}{PeR}\ ,\ r=\frac{r^*}{R}\ ,\ u=\frac{\mu u^*}{GR^2}\ ,\ Pe=\frac{\rho c_p RU}{k} \qquad (۲)$$
$$\theta=\frac{T^*-T_w}{T_m-T_w}$$

با استفاده از متغیرهای بی‌بعد، معادله مومنتوم سیال در دستگاه مختصات استوانه‌ای به صورت زیر نوشته می‌شوند.

$$\frac{d^2u}{dr^2}+\frac{1}{r}\frac{du}{dr}-s^2u+\frac{1}{M}=0 \qquad (۳)$$

که در آن:

$$M=\frac{\mu_{eff}}{\mu}\ ,\ Da=\frac{K}{R^2}\ ,\ s=\left(\frac{1}{MDa}\right)^{1/2} \qquad (۴)$$

برای تعیین دما و سرعت متوسط از روابط زیر استفاده می‌کنیم.

$$U = \frac{2}{R^2}\int_0^R u^* r^* dr^* \ , \ T_m = \frac{2}{R^2 U}\int_0^R u^* T^* r^* dr^* \qquad (۵)$$

برای تعیین سرعت بی‌بعد از رابطه زیر استفاده می‌کنیم.

$$\hat{u} = \frac{u^*}{U} \qquad (۶)$$

برای تعیین عدد بی‌بعد ناسلت از رابطه زیر استفاده می‌کنیم.

$$Nu = \frac{2Rq''}{k\left(T_w - T_m\right)} \qquad (۷)$$

از تحلیل قانون اول ترمودینامیک برای یک المان داریم.

$$\frac{dT_m}{dx} = \frac{2q''}{\rho c_p RU} \qquad (۸)$$

با استفاده از متغیرهای بی‌بعد (۴)، معادله انرژی در دستگاه مختصات استوانه‌ای به صورت زیر نوشته می‌شوند.

$$\frac{d^2\theta}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{d\theta}{dr} + \hat{u}Nu = 0 \qquad (۹)$$

شرایط مرزی دما به صورت زیر می‌باشد.

$$\left.\theta\right)_{r=1} = 0 \quad , \quad \left.\frac{d\theta}{dr}\right)_{r=1} = 0 \qquad (۱۰)$$

۴- تئوری روش هموتوپی‌پرتاربیشن (HPM)

برای توضیح اصول کار این روش در حل معادلات دیفرانسیل غیرخطی، معادله دیفرانسیل زیر را در نظر می‌گیریم.

$$A(r) = f(r) \ , \ r \in \Omega \qquad (۱۱)$$

که شرایط مرزی آن چنین است:

$$B(u, \frac{\partial u}{\partial n}) = 0 \ , \ r \in \Gamma \qquad (۱۲)$$

Γ مرز دامنه Ω می باشد. و در حالت عمومی عملگر A را می‌توان به دوقسمت تقسیم کرد، L,N که L قسمت خطی و N قسمت غیرخطی می‌باشد. بنابراین معادله (۱۱) را می توان بصورت زیر نوشت.

$$L(u) + N(u) - f(r) = 0 \qquad (۱۳)$$

ساختار هوموتوپی پرتاربیشن (اختلالی) بصورت زیر نمایش داده می‌شود:

$$H(w,p) = (1-p)\left[L(w) - L(u_0)\right] + p\left[A(w) - f(r)\right] = 0 \qquad (۱۴)$$

بطوریکه در معادله (۱۴) , $p \in [0,1]$ یک پارامتر تعبیه شده است. و u_0 تقریبی اولیه از حل معادله (۱۱) است که شرایط مرزی را ارضا می کند. از معادله (۱۴) براحتی داریم.

$$H(w,0) = L(w) - L(u_0) = 0 \qquad (۱۵)$$

$$H(w,1) = A(w) - f(r) = 0 \qquad (۱۶)$$

با بکارگیری تکنیک هوموتوپی پرتاربیشن، فرض می‌کنیم که حل معادله (۱۱) بصورت سری از p قابل بیان باشد که به شکل زیر هستند.

$$w = w_0 + w_1 p + w_2 p^2 + w_3 p^3 + \ldots + w_n p^n \qquad (۱۷)$$

بهترین تقریب برای معادله (۱۷) را می توان با قرار دادن $p=1$ بصورت زیر بدست آورد.

$$u = \lim_{p\to 1} w = w_0 + w_1 + w_2 + w_3 + \ldots \qquad (۱۸)$$

۵- حل معادلات به کمک Homotopy Perturbation Method

در این قسمت، از روش هوموتوپی پرتوربیشن برای حل معادله (۳) به همراه شرایط مرزی آن استفاده می‌کنیم. فرایندی مشابه نیز برای حل معادله (۹) و شرایط مرزی متناظر با آن بکار برده خواهد شد. معادله دیفرانسیل دما و سرعت، برای حالت عدد دارسی بزرگ $(s >> 1)$ به صورت زیر حل می‌کنیم.

$$w = w_0 + pw_1 + p^2 w_2 + p^3 w_3 + \cdots \qquad (۱۹)$$

طبق روش هوموتوپی پرتاربیشن، قسمت خطی وغیرخطی معادله (۵) را از همدیگر جدا می‌کنیم و هوموتوپی زیر را تشکیل می‌دهیم.

$$H(w,p)=\frac{d^2w}{dr^2}+\frac{1}{r}\frac{dw}{dr}-\left(\frac{d^2u_0}{dr^2}+\frac{1}{r}\frac{du_0}{dr}\right)+ p\left(\frac{d^2u_0}{dr^2}+\frac{1}{r}\frac{du_0}{dr}\right)+p\left(-s^2w+\frac{1}{M}\right)=0 \qquad (۲۰)$$

با جایگذاری معادله (۱۷) در معادله (۲۰) و مساوی قرار دادن ضریب های همانند p ، سیستمی از معادلات با $(n+1)$ عدد معادله دیفرانسیل که باید بصورت همزمان حل شوند، بدست می‌آوریم که (n)، مرتبه p در معادله (۱۷) است. با افزایش (n) ، حل دقیق‌تری خواهیم داشت. با فرض $n=2$ برای اعداد دارسی بزرگ، سیستم معادلات بدین شکل خواهد بود.

$$\begin{aligned} &p^0:\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{dw_0}{dr}\right)=0\\ &P^1:\frac{d^2w_1}{dr^2}+\frac{1}{r}\frac{dw_1}{dr}+\frac{d^2u_0}{dr^2}+\frac{1}{r}\frac{du_0}{dr}-s^2w_0+\frac{1}{M}=0\\ &P^2:\frac{d^2w_2}{dr^2}+\frac{1}{r}\frac{dw_2}{dr}-s^2w_1=0\end{aligned} \qquad (۲۱)$$

شرایط مرزی برای حل معادله دیفرانسیل به صورت زیر می‌باشد.

$$u\Big)_{r=1}=0 \quad , \quad \frac{du}{dr}\Big)_{r=1}=0 \qquad (۲۲)$$

از معادله (۱۳) تا (۱۴) توابع زیر بصورت متوالی بدست می‌آیند.

$$w_0=0 \qquad (۲۳)$$

$$w_1=\frac{(1-r^2)}{4M} \qquad (۲۴)$$

$$w_2=\frac{s^2(1-r^2)}{4M}\left(\frac{r^2-3}{16}\right) \qquad (۲۵)$$

در نهایت حل معادله دیفرانسیل غیرخطی (۱۸) وقتی که $(p\to 1)$ میل می کند بصورت زیر خواهد بود.

$$u=\frac{(1-r^2)}{4M}\left(1-\frac{s^2}{16}(3-r^2)\right)+o(p^3) \qquad (۲۶)$$

تغییرات سرعت متوسط از رابطه زیر بدست می آید.

$$U=\frac{R^2G}{4\mu M}\left(\frac{1}{2}-\frac{s^2}{12}\right) \qquad (۲۷)$$

تغییرات سرعت بی‌بعد از رابطه زیر بدست می آید.

$$\hat{u}=2(1-r^2)\left[1+\frac{s^2}{24}(3r^2-1)\right] \qquad (۲۸)$$

به روشی مشابه معادله (۸) حل شده و نتیجه بصورت زیر بدست می‌آید.

$$\theta=\frac{Nu}{8}\left[r^4-4r^2+3+\frac{s^2}{36}(r^6-3r^4+3r^2-1)\right]+O(p^3) \qquad (۲۹)$$

تغییرات عدد بی‌بعد ناسلت از رابطه زیر بدست می‌آید.

$$Nu=\frac{48}{11}\left(1+\frac{2s^2}{165}\right) \qquad (۳۰)$$

۶- حل معادلات به کمک *WKB Method*

معادله دیفرانسیل دما و سرعت، برای حالت عدد دارسی کوچک $(s<<1)$ به صورت زیر حل می‌کنیم.

$$u=Da+e^{sF(r;s)} \qquad (۳۱)$$

که در آن:

$$F(r;s)=F_0(r;s)+\frac{F_1(r;s)}{s}+o\left(\frac{1}{s^2}\right) \qquad (۳۲)$$

با جاگذاری در و در نهایت حل معادله دیفرانسیل (۳) بصورت زیر خواهد بود.

$$u=Da\left(1-\frac{e^{-s(1-r)}}{\sqrt{r}}\right) \qquad (۳۳)$$

تغییرات سرعت متوسط از رابطه زیر بدست می آید.

$$U=\frac{R^2GDa}{4\mu M}\left(1-\frac{2}{s}\right) \qquad (۳۴)$$

به روشی مشابه معادله (۹) حل شده و نتیجه بصورت زیر بدست می‌آید.

$$\theta = \frac{Nu}{4}\left(1+\frac{2}{s}\right)\left(1-r^2\right) \tag{۳۵}$$

تغییرات عدد بی‌بعد ناسلت از رابطه زیر بدست می‌آید.

$$Nu = 8\left(1-\frac{4}{s}\right) \tag{۳۶}$$

۷- جدول‌ها، شکل‌ها، نمودارها و عکس‌ها

برای بررسی درستی راحل به کار رفته در این مقاله یک بار مسئله را برای جریان سیال در درون لوله بدون مواد متخلخل با شرایط مرزی دیواره شار ثابت حل می‌کنیم و جواب مسئله را با جوابهای تعیین شده از حل ارائه شده در این مطالعه مقایسه می‌کنیم. بنابراین در عدد دارسی بزرگ با $Da \to \infty$ نتایج زیر را از روابط (۱۰) برای عدد بی‌بعد ناسلت به صورت زیر داریم.

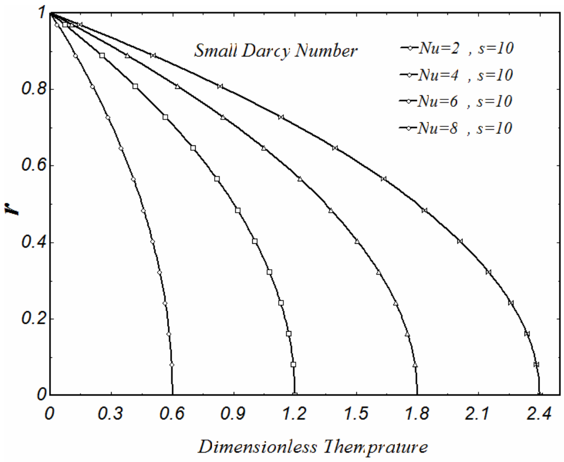
$$Nu = \frac{48}{11} \tag{۳۷}$$

با توجه به اینکه عدد ناسلت بدست آمده برای جریان مورد مطالعه از روش هوموتوپی پرتاربیشن در حالت $Da \to \infty$، با عدد ناسلت ارائه شده برای جریان سیال در محیط غیرمتخلخل برابر است[5]، بنابراین می‌توان نتیجه گرفت که روش به کار رفته در تعیین مشخصه‌های جریان روش درستی می‌باشد و برای حالت جریان در درون محیط متخلخل نیز صحت دارد.

برای عدد دارسی کوچک با $Da \to 0$ نتایج زیر را از روابط (۱۰) برای عدد بی‌بعد ناسلت به صورت زیر داریم.

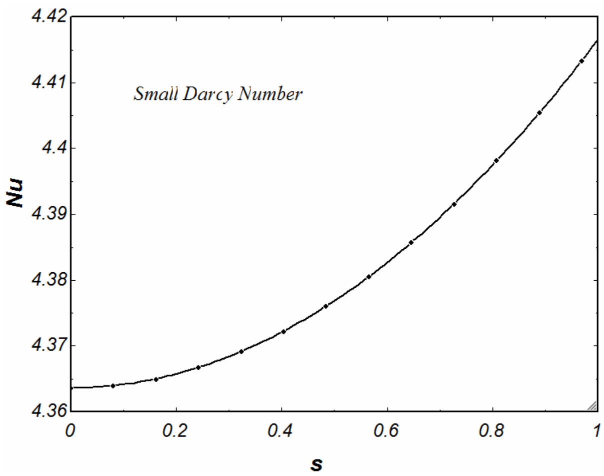
$$Nu = 8 \tag{۳۸}$$

عدد ناسلت بدست آمده، با عدد ناسلت برای جریان سیال در محیط غیر متخلخل همخوانی دارد[5].



شکل (۴) تاثیر عدد رینولدز شعاعی بر روی تغییرات سرعت

شکل(۴) تاثیر تغییرات عددهای دارسی بر روی دمای بی‌بعد را نشان می‌دهد. نتایج حاصل از شکل نشان دهنده این است، با افزایش عدد دارسی تغییرات دما کاهش می‌یابد.



شکل (۵)

تاثیر عدد رینولدز شعاعی بر روی افت فشار برای $\beta = 2$

شکل(۵) تاثیر عدد رینولدز شعاعی بر روی افت فشار را نشان می‌دهد. با افزایش عدد رینولدز افت فشار در کل لوله گرمایی کاهش پیدا می‌کند.

۸- نتیجه‌گیری

نتایج نشان می‌دهد که ناسلت متوسط المان حرارتی دیواره با افزایش مقدار s، افزایش می‌یابد. همچنین مشاهده میشود که سرعت سیال در محیط متخلخل در مقایسه با سرعت سیال در محیط سیال خالص

کمتر بوده و با کاهش بیشتر عدد دارسی، سرعت سیال در این محیط به صفر میرسد یعنی در این حالت محیط متخلخل رفتاری شبیه به جسم جامد دارد. الگوریتم حل در روش هوموتوپی پرتاربیشن (اختلالی) آسان، ساده و سریع بوده و دقت کار بالا و حجم محاسبات کم می‌باشد. انتخاب حدس اولیه در روش هموتوپی پرتوربیشن اختیاری می‌باشد که یکی از بهترین انتخاب‌ها برای حدس اولیه، شرایط مرزی و اولیه سیستم می‌باشد و یا برای تعیین حدس اولیه می‌توان از روش پرتاربیشن نیز کمک گرفت.

فهرست علائم

c_p	ظرفیت گرمایی ویژه
Da	عدد دارسی
G	گرادیان فشار
pe	عدد پکلت
	علائم یونانی
ρ	چگالی، kg/m^3

۹- مراجع

[1] Khaled ARA, Vafai K. The role of porous media in modeling flow and heat transfer in biological tissues. International Journal of Heat and Mass Transfer 2003; 46:4989-5003.

[2] M.Kaviany, Principle of heat transfer in Porous Media, 2nd Edition, Springer, New York, 1995.

[3] A.H. Nayfeh, Problems in Perturbation, 2nd Edition, Wiley, New York, 1993.

[4] D.A. Nield, A. Bejan, Convection in Porous Media, 2nd Edition, Springer, New York, 1999.

[5] R.K. Shah, A.L. London, Laminar Flow Forced Convection in Ducts, Advances in Heat Transfer, Supplement 1, Academic Press, New York, 1978.